Factorisation

Observer et retenir

Voici rappelée sous forme de formule la factorisation. Pour n'importe quels nombres décimaux a, b et k, on a :
$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$ et $k \times a - k \times b = k \times (a - b)$.
On dit qu'on factorise k le facteur commun aux deux produits.

Cette règle est très importante car elle permet souvent de rendre les calculs plus simples pour effectuer le calcul d'une expression ou bien d'avoir deux écritures différentes d'une même expression numérique.
Cette règle de factorisation est aussi utilisée pour réduire des expressions.

Exemple 1 : $27{,}05 \times 31{,}04 + 22{,}95 \times 31{,}04 = (27{,}05 + 22{,}95) \times 31{,}04 = 50 \times 31{,}04 = 1\ 552$. On factorise le facteur commun 31,04.

Exemple 2 : On a $A = 3x - 4x + 2 + 9x - 5$ donc $A = 3x - 4x + 9x - 5 + 2$ donc $A = x \times (3 - 4 + 9) - 5 + 2$ donc $A = 8x - 3$.
L'écriture $8x - 3$ est appelée la forme réduite de l'expression A.

Exemple 3 : On a $B = 2x^3 - 3x + x^3 - y - 4y^2 + 5y$ donc $B = 2x^3 + x^3 - 3x - 4y^2 - y + 5y$ donc $B = 3x^3 - 3x - 4y^2 + 4y$.
L'écriture $3x^3 - 3x - 4y^2 + 4y$ est appelée la forme réduite de l'expression B.

Appliquer

1 **1.** Soit $C = 2x^3 - 5 + 4x - 7x^2 + 6x^3 + 8x^2 - 9$. Réduisez l'expression C.

$C = 2x^3 +$ ..... $- 7x^2 +$ ..... $+ 4x -$ ..... $- 9$

$C =$ ..... $+$ ..... $+ 4x - 14$

2. Calculez C quand $x = +2$ et en utilisant l'expression du texte et la forme réduite.

a. $C = 2 \times (+2)^3 - 5 + 4 \times (\ldots) - 7 \times (\ldots)^2 + 6 \times (\ldots)^3 + 8 \times (\ldots)^2 - 9$

$C = 2 \times 8 -$ ..... $+ 8 - 7 \times 4 + 6 \times$ ..... $+ 8 \times$ ..... $- 9$

$C =$ .....

$C =$ ..... $-$ ..... donc $C = 62$

b. $C = 8 \times (+2)^3 +$ ..... $+ 4 \times (+2) - 14$

$C =$ .....

$C =$ .....

$C =$ .....

3. Calculez C quand $x = -10$ et en utilisant l'expression du texte et la forme réduite.

a. $C = 2 \times (-10)^3 - 5 + 4 \times (\ldots) - 7 \times (\ldots)^2 + 6 \times \ldots + 8 \times \ldots - 9$

$C =$ .....

$C =$ .....

b. $C = 8 \times (-10)^3 + (\ldots)^2 + 4 \times \ldots - 14$

$C =$ ..... $+$ .....

$C =$ ..... $-$ .....

$C =$ .....

2 **Calculez les expressions suivantes après les avoir factorisées.**

1. $48 \times 412{,}8 + 24 \times 412{,}8 - 22 \times 412{,}8 =$ .....

2. $3a - 8a + 15a =$ .....

3. $75t + t - 3t =$ .....

3 **Factorisez le facteur x, puis réduisez les expressions suivantes.**

1. $5x + 12x =$ .....

2. $2x - 11x =$ .....

3. $-6x + 18x =$ .....

4. $-2x - 16x =$ .....

S'entraîner

4 **Réduisez si possible chacune des expressions suivantes.**

1. $4x - t + 21$ **2.** $3a + 1 - 17a$ **3.** $21 - 3x + 5x^2 + x$ **4.** $6b - 20b + 4t^2 + 11$

Suppression des parenthèses

Observer et retenir

Voici plusieurs règles pour simplifier l'écriture d'expressions numériques.

- Pour simplifier l'écriture d'une expression littérale, on peut supprimer le symbole × devant une lettre ou une parenthèse.

Exemples : Le produit $7 \times a$ peut s'écrire $7a$; le produit $c \times y$ peut s'écrire cy ; le produit $8 \times (t + 9)$ peut s'écrire $8(t + 9)$.

- Pour tout nombre a, on peut écrire : $a \times a = a^2$ (qui se lit « a au carré ») et $a \times a \times a = a^3$ (qui se lit « a au cube »).
Le nombre a^2 est le carré du nombre a. Le nombre a^3 est le cube du nombre a.

Exemple : Le produit 61×61 peut s'écrire 61^2 ; il vaut 3 721.

- Pour supprimer une parenthèse précédée d'une addition, on supprime cette parenthèse sans modifier le contenu de celle-ci.
- Pour supprimer une parenthèse précédée d'une soustraction, on supprime cette parenthèse et la soustraction en écrivant l'opposé de chaque terme contenu dans la parenthèse.

Exemples : $7 + (31 - a + c) = 7 + 31 - a + c = 38 - a + c$ et $b - (-5 - a + c) = b + 5 + a - c$.

Appliquer

1 **Supprimez les parenthèses, puis réduisez.**

1. $15 + (x + 4) =$ .....
2. $3 \times x - (9 - 4 \times y) =$ .....
3. $(2 \times x - 7) - 1 =$ .....
4. $(x + 12) + (-4x + 21) =$ .....
5. $-(-3x + 5) + (y - 2) =$ .....
6. $8 - (-2x + 1) + (3 - 5x) =$ .....

2 **Associez une expression de la colonne de gauche à une expression de la colonne de droite qui lui est égale.**

$(5x + 1) - (2x + 3)$ •	• $-2x + 3$
$(2 + 3x) - 6x$ •	• $3x - 2$
$3 + x + (2x - 1)$ •	• -3
$-(4x + 9) - (-x - 7)$ •	• $3x + 2$
$-3x - 2 - (1 - 3x)$ •	• $-3x - 2$
$7 - (2x + 4)$ •	• $-3x + 2$

Attention ▶ Il y a un intrus.

3 **Supprimez les parenthèses, puis réduisez.**

1. $5x + \frac{1}{4} - (12x - 7) =$ .....
2. $-7 + (x - 6) - (-3 + 4x) =$ .....
3. $\left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}x\right) =$ .....

S'entraîner

4 **x, y et z étant des nombres relatifs, on considère les expressions suivantes :**

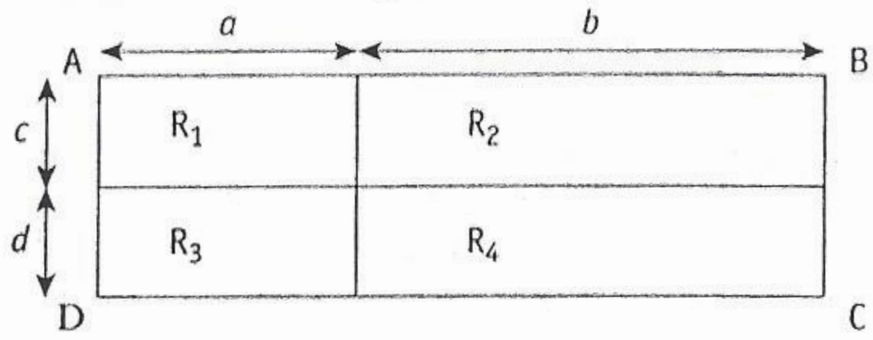
$$A = x - (-3y + 8) \ ; \ B = -2z - (x - 7) \ ; \ C = 2z - 3y.$$

Montrez que A + B + C a toujours la même valeur quelles que soient les valeurs données aux nombres x, y et z.

Calcul littéral : développement du type $(a + b)(c + d)$

Observer et retenir

Soit le rectangle ABCD dessiné ci-contre. On veut calculer de deux manières différentes l'aire de ce rectangle.



Première manière

On calcule l'aire du rectangle de longueur $(a + b)$ et de largeur $(c + d)$.

Soit $\text{Aire}_{ABCD} = (a + b)\ (c + d)$

Seconde manière

On calcule la somme des aires des rectangles R_1, R_2 , R_3 et R_4.

Soit $\text{Aire}_{ABCD} = \text{Aire}_{R1} + \text{Aire}_{R2} + \text{Aire}_{R3} + \text{Aire}_{R4}$

$\text{Aire}_{ABCD} = (a \times c) + (b \times c) + (a \times d) + (b \times d)$ donc $\text{Aire}_{ABCD} = a \times c + b \times c + a \times d + b \times d$

On conclut que : $(a + b)\ (c + d) = a \times c + b \times c + a \times d + b \times d$

> Pour n'importe quels nombres a, b, c et d, on a : $(a + b)\ (c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Quelle que soit la méthode utilisée, quand on développe une parenthèse de deux termes sur une parenthèse de deux termes, on obtient une somme de quatre produits.

$(a + b)\ (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$. Autrement dit : $(a + b)\ (c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Appliquer

1 Développez les expressions suivantes.

1. $A = (x + 4)\ (y + 5)$

2. $B = (2x + 7)\ (3y + 5)$

3. $C = (x + 3)\ (x + 5)$

4. $D = (5x + 8)\ (4x + 6)$

2 Calculez A, B, C et D quand $x = -3$ et $y = 5$.

1. A =
2. B =
3. C =
4. D =

3 Développez les expressions suivantes.

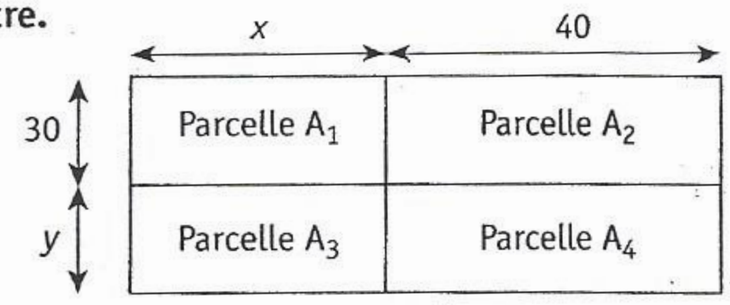
1. $(y + 5)\ (y + 6)$

2. $(6a + 3)\ (2a + 7)$

3. $(5b + 3a)\ (b + 2a)$

S'entraîner

4 Un promoteur achète quatre parcelles rectangulaires représentées par le dessin ci-contre.



1. Calculez les aires A_1, A_2, A_3 et A_4 des quatre parcelles sachant que l'unité est le mètre.
2. Calculez l'aire de la parcelle 1 quand $x = 75$ m.
3. Calculez l'aire de la parcelle 4 quand $y = 50$ m.
4. Calculez la valeur de x pour que les parcelles 1 et 2 aient la même aire.
5. Calculez la valeur de y pour que l'aire de la parcelle 4 soit le double de l'aire de la parcelle 2.

Calcul littéral : développement du type $(a + b)(c - d)$; $(a - b)(c + d)$; $(a - b)(c - d)$

Observer et retenir

Vous avez vu dans la fiche précédente comment on développe une expression du type $(a + b)(c + d)$. On va maintenant généraliser ce genre de développement quelle que soit l'opération dans les parenthèses (addition ou soustraction).
Prenons $(a + b)(c - d)$. On peut écrire que $(a + b)(c - d) = (a + b)(c + (-d))$.
On peut donc développer cette expression selon le modèle de la fiche 25.
$(a + b)(c + (-d)) = a \times c + a \times (-d) + b \times c + b \times (-d)$.
On applique maintenant la règle des signes du produit. On obtient : $(a + b)(c + (-d)) = ac - ad + bc - bd$.
On expliquerait de la même manière que : $(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$ et $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$.

Pour n'importe quels nombres a, b, c et d, on a :
$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$; $(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$; $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$.

Pour retenir ces formules, il faut savoir que la forme développée est obtenue en distribuant chaque terme de la première parenthèse sur chaque terme de la seconde parenthèse, le signe attribué à chaque produit est donné par la règle des signes du produit.

Exemple : $(5 + x)(t - 8) = 5t - 40 + xt - 8x$; $(a - 3)(a - 7) = a \times a - 7a - 3a + 7 \times 3 = a^2 - 10a + 21$.

Appliquer

1 Développez les expressions suivantes.

1. $(a + 3)(c - 5)$ .....
2. $(y - 9)(t + 3{,}5)$ .....
3. $(12 - d)(2{,}5 - c)$ .....
4. $(y + 2{,}4)(z - 4)$ .....

2 **1.** On veut calculer 51×98 sans poser l'opération. On sait que $51 \times 98 = (50 + 1)(100 - 2)$. Développez $(50 + 1)(100 - 2)$.
$(50 + 1)(100 - 2) =$ ..... $=$ ..... $=$ .....
Donc $51 \times 98 =$ .....

2. Utilisez une méthode similaire pour calculer :
a. $998 \times 99 =$ (.....)(.....) = ...
b. $47 \times 104 =$ (.....)(.....) = ...

3 Développez et réduisez les expressions suivantes.

1. $(x + 2)(x - 4)$ .....
2. $(y - 2{,}5)(y - 8)$ .....
3. $\left(t - \frac{2}{5}\right)\left(t + \frac{3}{10}\right)$ .....

S'entraîner

4 Développez et réduisez l'expression suivante : $H = (x + 3)(x - 4) + 2(x - 5) - (x + 6)(x + 7)$.
Aide ▶ L'expression est constituée de trois termes ; développez chacun d'eux. Il est conseillé de placer chaque développement obtenu entre parenthèses, puis de tenir compte des signes devant chaque groupe.

5 Martin choisit un nombre. Successivement, il soustrait 2 à ce nombre et il lui ajoute 5. Enfin, il multiplie les deux résultats.
1. Appelez x le nombre choisi par Martin et écrivez l'expression numérique correspondant à son programme de calcul.
2. Développez l'expression obtenue. Rédigez un programme de calcul correspondant à la forme développée obtenue.
3. Calculez le nombre obtenu par Martin quand il a choisi 14 comme nombre de départ.

Solutions

Factorisation

1 **1.** $C = 2x^3 - 5 + 4x - 7x^2 + 6x^3 + 8x^2 - 9$
$C = 2x^3 + 6x^3 - 7x^2 + 8x^2 + 4x - 5 - 9$
$C = 8x^3 + x^2 + 4x - 14.$

2. a. $C = 2 \times (+2)^3 - 5 + 4 \times (+2) - 7 \times (+2)^2 + 6 \times (+2)^3 + 8 \times (+2)^2 - 9$
$C = 2 \times 8 - 5 + 8 - 7 \times 4 + 6 \times 8 + 8 \times 4 - 9$
$C = 16 - 5 + 8 - 28 + 48 + 32 - 9$
$C = 104 - 42$ donc $C = 62.$

b. $C = 8 \times (+2)^3 + (+2)^2 + 4 \times (+2) - 14$
$C = 8 \times 8 + 4 + 8 - 14$
$C = 64 + 12 - 14$
$C = 62.$

3. a. $C = 2 \times (-10)^3 - 5 + 4 \times (-10) - 7 \times (-10)^2 + 6 \times (-10)^3 + 8 \times (-10)^2 - 9$
$C = -2 \times 1000 - 5 - 4 \times 10 - 7 \times 100 - 6 \times 1000 + 8 \times 100 - 9$
$C = -2\,000 - 5 - 40 - 700 - 6\,000 + 800 - 9$
$C = -8\,754 + 800$ donc $C = -7\,954.$

b. $C = 8 \times (-10)^3 + (-10)^2 + 4 \times (-10) - 14$
$C = -8\,000 + 100 - 40 - 14$
$C = 100 - 8\,054$
$C = -7\,954.$

2 **1.** $48 \times 412{,}8 + 24 \times 412{,}8 - 22 \times 412{,}8 = (48 + 24 - 22) \times 412{,}8$
$= 50 \times 412{,}8 = 20\,640.$

2. $3a - 8a + 15a = (3 - 8 + 15) \times a = 10a.$

3. $75t + t - 3t = (75 + 1 - 3) \times t = 73t.$

3 **1.** $5x + 12x = x \times (5 + 12) = 17x.$

2. $2x - 11x = x \times (2 - 11) = -9x.$

3. $-6x + 18x = x \times (-6 + 18) = 12x.$

4. $-2x - 16x = x \times (-2 - 16) = -18x.$

Suppression des parenthèses

1 **1.** $15 + (x + 4) = 15 + x + 4 = 19 + x.$

2. $3 \times x - (9 - 4 \times y) = 3x - 9 + 4y.$

3. $(2 \times x - 7) - 1 = 2x - 7 - 1 = 2x - 8.$

4. $(x + 12) + (-4x + 21) = x + 12 - 4x - 21 = -3x - 9.$

5. $-(-3x + 5) + (y - 2) = 3x - 5 + y - 2 = 3x + y - 7.$

6. $8 - (-2x + 1) + (3 - 5x) = 8 + 2x - 1 + 3 - 5x = -3x + 10.$

2 $(5x + 1) - (2x + 3) = 5x + 1 - 2x - 3 = 3x - 2$
$(2 + 3x) - 6x = 2 + 3x - 6x = -3x + 2$
$3 + x + (2x - 1) = 3 + x + 2x - 1 = 3x + 2$
$-(4x + 9) - (-x - 7) = -4x - 9 + x + 7 = -3x - 2$
$-3x - 2 - (1 - 3x) = -3x - 2 - 1 + 3x = -3$
$7 - (2x + 4) = 7 - 2x - 4 = -2x + 3$

3 **1.** $5x + \frac{1}{4} - (12x - 7) = 5x + \frac{1}{4} - 12x + 7 = -7x + \frac{1}{4} + \frac{28}{4} = -7x + \frac{29}{4}.$

2. $-7 + (x - 6) - (-3 + 4x) = -7 + x - 6 + 3 - 4x = -3x - 10.$

3. $\left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}x\right) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}x = x - \frac{7}{12}.$

4 $A + B + C = x - (-3y + 8) - 2z - (x - 7) + 2z - 3y$
$= x + 3y - 8 - 2z - x + 7 + 2z - 3y = -1.$

Quelles que soient les valeurs des nombres x, y et z, l'expression $A + B + C$ est toujours égale à -1.

4 **1.** $4x - t + 21$: expression qui ne peut pas être réduite.

2. $3a + 1 - 17a = a \times (3 - 17) + 1 = -14a + 1.$

3. $21 - 3x + 5x^2 + x = 5x^2 + x \times (-3 + 1) + 21 = 5x^2 - 2x + 21.$

4. $6b - 20b + 4t^2 + 11 = b \times (6 - 20) + 4t^2 + 11 = -14b + 4t^2 + 11.$

Calcul littéral : développement du type $(a + b)(c + d)$

1 **1.** $A = (x + 4)(y + 5) = x \times y + 5 \times x + 4 \times y + 4 \times 5 = xy + 5x + 4y + 20.$
2. $B = (2x + 7)(3y + 5) = 2 \times x \times 3 \times y + 2 \times x \times 5 + 7 \times 3 \times y + 7 \times 5$
$B = 6xy + 10x + 21y + 35.$
3. $C = (x + 3)(x + 5) = x \times x + x \times 5 + 3 \times x + 3 \times 5 = x^2 + 5x + 3x + 15$
$C = x^2 + 8x + 15.$
4. $D = (5x + 8)(4x + 6) = 5 \times x \times 4 \times x + 5 \times x \times 6 + 8 \times 4 \times x + 8 \times 6$
$D = 20x^2 + 30x + 32x + 48 = 20x^2 + 62x + 48.$

2 **1.** $A = (-3) \times 5 + 5 \times (-3) + 4 \times 5 + 20 = -15 - 15 + 20 + 20$
$A = -30 + 40 = 10.$
2. $B = 6 \times (-3) \times 5 + 10 \times (-3) + 21 \times 5 + 35 = -90 - 30 + 105 + 35$
$B = -120 + 140 = 20.$
3. $C = (-3)^2 + 8 \times (-3) + 15 = 9 - 24 + 15 = 24 - 24 = 0.$
4. $D = 20 \times (-3)^2 + 62 \times (-3) + 48 = 20 \times 9 - 186 + 48$
$D = 180 + 48 - 186 = 42.$

3 **1.** $(y + 5)(y + 6) = y^2 + 6y + 5y + 30 = y^2 + 11y + 30.$
2. $(6a + 3)(2a + 7) = 12a^2 + 42a + 6a + 21 = 12a^2 + 48a + 21.$
3. $(5b + 3a)(b + 2a) = 5b^2 + 10ba + 3ab + 6a^2 = 5b^2 + 13ab + 6a^2.$

4 **1.** L'aire de la parcelle 1 est égale à : $30 \times x = 30x$ m².
L'aire de la parcelle 2 est égale à : $30 \times 40 = 1\,200$ m².
L'aire de la parcelle 3 est égale à : $y \times x = yx$ m².
L'aire de la parcelle 4 est égale à : $y \times 40 = 40y$ m².
2. Quand $x = 75$ m, l'aire de la parcelle 1 est égale à :
$30 \times 75 = 2\,250$ m².
3. Quand $y = 50$ m, l'aire de la parcelle 4 est égale à :
$40 \times 50 = 2\,000$ m².
4. Pour trouver la valeur de x, il faut résoudre l'équation $30x = 1\,200$.
$30x = 1200$ signifie que $x = \frac{1\,200}{30}$; cela signifie que $x = 40$.
Pour que les deux aires soient égales, il faut que la valeur de x soit 40 m.
5. Pour que l'aire de la parcelle 4 soit le double de l'aire de la parcelle 2, il faut résoudre l'équation $40y = 2 \times 1\,200$.
$40y = 2 \times 1\,200$ signifie que $40y = 2\,400$;
cela signifie que $y = \frac{2\,400}{40}$; cela signifie que $y = 60$.
L'aire de la parcelle 4 sera le double de l'aire de la parcelle 2 quand la valeur de y sera 60 m.

Calcul littéral : développement du type $(a + b)(c - d)$; $(a - b)(c + d)$; $(a - b)(c - d)$

1 **1.** $(a + 3)(c - 5) = a \times c - a \times 5 + 3 \times c - 3 \times 5 = ac - 5a + 3c - 1$
2. $(y - 9)(t + 3,5) = y \times t + y \times 3,5 - 9 \times t - 9 \times 3,5 = yt + 3,5y - 9t - 31,$
3. $(12 - d)(2,5 - c) = 12 \times 2,5 - 12 \times c - d \times 2,5 + d \times c$
$= 30 - 12c - 2,5d + dc.$
4. $(y + 2,4)(z - 4) = y \times z - y \times 4 + 2,4 \times z - 2,4 \times 4 = yz - 4y + 2,4z - 9,$

2 **1.** $(50 + 1)(100 - 2) = 50 \times 100 - 50 \times 2 + 1 \times 100 - 1 \times$
ou $5\,000 - 100 + 100 - 2 = 4\,998.$
Donc $51 \times 98 = 4\,998.$
2. a. $998 \times 99 = (1\,000 - 2)(100 - 1)$
$998 \times 99 = 1\,000 \times 100 - 1\,000 \times 1 - 2 \times 100 + 2 \times 1$
$998 \times 99 = 100\,000 - 1\,000 - 200 + 2$
$998 \times 99 = 98\,802.$
b. $47 \times 104 = (50 - 3)(100 + 4)$
$47 \times 104 = 50 \times 100 + 50 \times 4 - 3 \times 100 - 3 \times 4$
$47 \times 104 = 5\,000 + 200 - 300 - 12$
$47 \times 104 = 4\,888.$

3 **1.** $(x + 2)(x - 4) = x \times x - x \times 4 + 2 \times x - 2 \times 4 = x^2 - 4x + 2x -$
ou $x^2 - 2x - 8.$
2. $(y - 2,5)(y - 8) = y^2 - y \times 8 - 2,5 \times y + 2,5 \times 8 = y^2 - 8y - 2,5y +$
ou $y^2 - 10,5y + 20.$
3. $\left(t - \frac{2}{5}\right)\left(t + \frac{3}{10}\right) = t \times t + t \times \frac{3}{10} - \frac{2}{5} \times t - \frac{2}{5} \times \frac{3}{10}$
ou $t^2 + \frac{3t}{10} - \frac{4t}{10} - \frac{2 \times 3}{5 \times 10} = t^2 - \frac{t}{10} - \frac{3}{25}.$

4 $H = (x \times x - x \times 4 + 3 \times x - 3 \times 4) + (2 \times x - 2 \times 5)$
$- (x \times x + x \times 7 + 6 \times x + 6 \times 7)$
$H = (x^2 - x - 12) + (2x - 10) - (x^2 + 13x + 42)$
$H = x^2 - x - 12 + 2x - 10 - x^2 - 13x - 42 = -12x - 64.$

5 **1.** Martin calcule : $(x - 2) \times (x + 5)$.
2. L'expression développée est :
$x \times x + x \times 5 - x \times 2 - 2 \times 5 = x^2 + 5x - 2x - 10 = x^2 + 3x - 10.$
Programme de calcul correspondant à la forme développée obtenue
Martin choisit un nombre. Il calcule le carré du nombre, auquel il ajou
le triple du nombre puis il soustrait 10.
3. Quand Martin a choisi 14 comme nombre de départ, il trouve :
$14^2 + 3 \times 14 - 10 = 196 + 42 - 10 = 228.$