

RÉVISION

Rappelons que deux *expressions algébriques* sont équivalentes si et seulement si elles associent les mêmes *valeurs* aux mêmes *variables*.
Ainsi par exemple : $2x + 3x$ et $12x - 7x$ ont toutes la même valeur, quelle que soit la valeur de la variable x .
Ce qu'on note :

$$2x + 3x = 12x - 7x$$

Les *transformations algébriques* qui nous occupent dans ce chapitre permettent de passer d'une expression algébrique à une expression équivalente.

1 Réduction de termes semblables

Exercice 1

Réduisez les termes semblables.

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $9 + 2x - 3 + 5x$ | 2. $9 + 2x^2 - 3 + 5x^2$ |
| 3. $9 + 2xy - 3 + 5xy$ | 4. $9 + 2x^2y - 3 + 5x^2y$ |
| 5. $9 + 2ab^2 - 3 + 5ab^2$ | 6. $9 + 2a - 3 + 5a$ |

Exercice 2

Réduisez les termes semblables.

- | |
|--|
| 1. $9 + 2 \cdot (a + b) - 3 + 5 \cdot (a + b)$ |
| 2. $9 + 2 \cdot (3a + b) - 3 + 5 \cdot (3a + b)$ |
| 3. $9 + 2 \cdot (3a - 2b) - 3 + 5 \cdot (3a - 2b)$ |
| 4. $9 + 2 \cdot (a^2 + b) - 3 + 5 \cdot (a^2 + b)$ |
| 5. $9 + 2 \cdot (a - b) - 3 + 5 \cdot (a - b)$ |

2 Développements

Développer une expression algébrique, c'est essentiellement transformer un produit de facteurs en une somme de termes en utilisant au besoin la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Après avoir développé une expression algébrique, on effectue une *réduction des termes semblables*.

Exercice 3

Développez et réduisez les expressions suivantes :

1. $(x^2 + 2x - 1) \cdot (x - 3)$
2. $(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7) \cdot (3x + 2)$
3. $(2x^3 - 3x^2 + 5)(4x^2 - 1)$
4. $(3x^3 + 7x - 4 - 5x^2)(3 - x - 2x^2)$

Exercice 4

Développez les expressions algébriques suivantes :

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| 1. $(a + b) \cdot (c + d)$ | 2. $(2a + b)(2a + 3d)$ |
| 3. $(a - b) \cdot (c - d)$ | 4. $(a^2 - 2b)(2a^3 + c)$ |
| 5. $(x - y) \cdot (z + w)$ | 6. $(2x^2 - 3xy)(3z + w)$ |

Exercice 5

Développez et réduisez les expressions suivantes :

1. $a \cdot (a^2 - 1) + a^2 \cdot (a - 1)$
2. $a^2 \cdot (x + 1) - b^2 \cdot (y - 2)$
3. $a \cdot (a^2 + b) + (a + b^2) \cdot b$
4. $(3a - 2) \cdot a - (3a + 2) \cdot a$

3 Développements à l'aide des identités remarquables

Certains développements sont si fréquents qu'il est plus utile de retenir la structure de l'expression finale que de refaire à chaque fois tous les calculs intermédiaires ; ces développements sont appelés des *identités remarquables*.

En voici les deux principales :

carré du binôme

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$

différence de deux carrés

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exercice 6

Développez les expressions suivantes :

- | | |
|-----------------------|--|
| 1. $(a + 2)^2$ | 2. $(2 - b)^2$ |
| 3. $(2a^2 - 3ab)^2$ | 4. $\left(\frac{2}{3} - a\right)^2$ |
| 5. $(a^2b + 2ab^2)^2$ | 6. $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)^2$ |
| 7. $(-3c - 0,5)^2$ | 8. $\left(\frac{3}{4}x - \frac{y}{3}\right)^2$ |

Exercice 7*

Effectuez et réduisez, en utilisant les identités remarquables dans la mesure du possible :

- | | |
|--|--|
| 1. $\left(\frac{1}{x} + 4\right)^2$ | 2. $(a + b)^2 + (a - b)^2$ |
| 3. $\left(\frac{2}{3}c + \frac{3}{4}d\right)^2$ | 4. $(3a + 4)^2 + (3a - 4)^2$ |
| 5. $\left(-\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y\right)^2$ | 6. $(a + b)^2 + a^2 + b^2$ |
| 7. $(x - 4)^2 - x^2$ | 8. $(a - x)^2 + (a + x)^2$ |
| 9. $\left(xy - \frac{x}{y}\right)^2$ | 10. $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2$ |

Exercice 8

Développez les expressions suivantes :

1. $(a+5)(a-5)$
2. $(x^2+0,1)(x^2-0,1)$
3. $(x+2y)(x-2y)$
4. $(2x+3a)(2x-3a)$
5. $(3+x)(3-x)$
6. $(xy^2+x^2y)(xy^2-x^2y)$
7. $(-x+5)(x+5)$
8. $(a^4x+\frac{1}{4})(a^4x-\frac{1}{4})$
9. $(-x+7)(-x-7)$
10. $(a^2b+ab^3)(a^2b-ab^3)$

Exercice 9*

Effectuez et réduisez, en utilisant les identités remarquables dans la mesure du possible :

1. $(a+1) \cdot (a-1) \cdot (a^2+1)$
2. $(a+3) \cdot (a-3) \cdot (a^2+9)$
3. $(x^2+y) \cdot (x^2-y) \cdot (x^4+y^2)$
4. $(a^2-4) \cdot (a+2) \cdot (a-2)$
5. $(x-\frac{1}{y}) \cdot (x+\frac{1}{y}) \cdot (x^2+\frac{1}{y^2})$
6. $(a-1) \cdot (a+1) \cdot (a^2+1) \cdot (a^4+1)$
7. $(a+2b) \cdot (a^2+4b^2) \cdot (a-2b) \cdot (a^4+16b^4)$

4 Exercices « mixtes »**Exercice 10**

Effectuez et réduisez, en utilisant les identités remarquables dans la mesure du possible :

1. $(x^3-1) \cdot (1+2x^3)$
2. $(a^2-1) \cdot (2a^2+a)$
3. $(a-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$
4. $(x^2-5x+1) \cdot (x+3)$
5. $(x^2-3x-2) \cdot (x+1)$
6. $(a^3+a-2) \cdot (a^2-a-2)$
7. $(1-b-c) \cdot a + b \cdot (a-c-2)$
8. $(a-b)^2 \cdot c^2 - (b-c)^2 \cdot a$

Exercice 11

Développez et réduisez les expressions suivantes, en utilisant les identités remarquables dans la mesure du possible.

1. $3 \cdot (1-5x) - (1-15x)$
2. $4 \cdot (3x-4)^2$
3. $[4 \cdot (3x-4)]^2$
4. $(1-5x) \cdot (-1+5x)$
5. $3 \cdot (x-5) + 4 \cdot (1-x)^2$

6. $-2 \cdot (x-5) - 2 \cdot (4-x)^2$

7. $[-2 \cdot (x-5) - 2 \cdot (4-x)]^2$

Exercice 12

Développez et réduisez les expressions suivantes, en utilisant les identités remarquables dans la mesure du possible.

1. $-(2x+3)(x-5) - (3-x)(2x-1)$
2. $(5x+1)(2x+3) + (2-x)(1-5x) - (3x-7)$
3. $(5x+3)(2x+1) + (2x-1)(x+2) - 3(1-x)$
4. $(5+x)^2 - (5-x)^2$
5. $(x-\frac{1}{2})^2$
6. $(2x-3)(2x+3)$
7. $(\frac{3x}{4}+\frac{1}{3})^2$

Exercice 13*

Développez et réduisez les expressions suivantes, en utilisant les identités remarquables dans la mesure du possible.

1. $(7x+\frac{4}{3})(7x-\frac{4}{3})$
2. $(7x-3)^2 - (3x-7)^2$
3. $(3x+1)^2 - (x-5)^2$
4. $(4x-3)(4x+3) + (6x-5)^2$
5. $(\frac{4}{7}x-\frac{1}{3})^2 + (x-2)(\frac{5}{7}+\frac{x}{3}) - (\frac{2}{7}x+1)^2$
6. $-3(2x+5)^2 + 4(x-2)^2$
7. $7x(x-3)^2 - 5x(4+x)^2$
8. $\frac{(x-3)^2}{6} + \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(x+1)^2}{18}$

5 FactorisationsFactoriser une expression algébrique, c'est transformer une *somme* de termes en un *produit* de plusieurs facteurs.**Exercice 14**

Mettez en évidence les facteurs communs :

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1. $xz - z^2$ | 2. $ab + b$ |
| 3. $x^2y - xy^2$ | 4. $ab - 2b$ |
| 5. $a^3x^2 - a^2x^3$ | 6. $6a^2b + 4ab$ |
| 7. $15a^7b^2 - 10a^5b^3$ | 8. $21a^7b^2 - 10a^5b^2$ |

Exercice 15

Factorisez les expressions suivantes :

1. $y \cdot (b-a) - x \cdot (b-a)$
2. $2(a+b) - 3(a+b)^2$
3. $12x^2y^2 - 18xy^3 + 24x^3y$
4. $12a^2x^3 - 30a^3x^2 + 18ax^4$
5. $3a^2 - 9ab^2 + 6a$
6. $3abx^3 - 21a^2b^2x^2 - 6a^3b^3x$
7. $5x \cdot (x+2)^2 - 3x^2 \cdot (x+2)$
8. $5 \cdot (a+b-c) - 10a \cdot (a+b-c)$

6 Factorisations à l'aide des identités remarquables

Exercice 16

Complétez les *identités remarquables* suivantes :

1. $4x^2 + \square + 25 = (\square + \square)^2$
2. $\square - \square + 100 = (3y - \square)^2$
3. $49z^2 - 42z + \square = (\square - \square)^2$
4. $4a^2 - \square = (\square + \square)(\square - 9)$
5. $(\square + 6m^3)^2 = 4a^2 + \square + \square$
6. $\square - 25 = (2x - \square)(\square + 5)$
7. $(\frac{3}{4}b^3 - \square)^2 = \square - 2b^3c^2 + \square$
8. $(\square + \frac{7}{5})(5x^4 - \square) = \square - \square$

Exercice 17

Factorisez les différences de carrés suivantes :

1. $a^2 - 9$
2. $25x^2 - 16$
3. $16x^2 - 25y^2$
4. $81 - \frac{a^2}{25}$
5. $a^2 - 16b^2$
6. $a^2b^2c^2 - m^2$
7. $a^4 - b^4$
8. $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{25}$
9. $81a^4 - \frac{1}{16}$
10. $a^2b^4 - 1$
11. $x^4 - 81$
12. $16a^2x^2 - 9b^2c^2$

Exercice 18

Vérifiez si les trinômes suivants sont des *carrés parfaits*.

1. $x^2 - 4x + 4$
2. $a^2 - 8a + 16$
3. $25a^2 + 30a + 9$
4. $49 - 14x + x^2$
5. $a^2 - \frac{2a}{3} + \frac{1}{9}$
6. $\frac{a^2}{9} + \frac{2ab}{15} + \frac{b^2}{25}$
7. $a^2 + 4ab + 4b^2$
8. $9x^2 - 12xy + 4y^2$

Exercice 19

Factorisez en mettant si possible en évidence et en recherchant ensuite le ou les produits remarquables à utiliser :

1. $ax^2 - ay^2$
2. $a^4b^2 - a^2b^4$
3. $a^2x - 6ax + 9x$
4. $3a^3x - 3ax^3$
5. $0,04x^2 - 0,09y^2$
6. $b^2 - b + 4^{-1}$
7. $ab^4cd^4 - ab^2cd^2$
8. $2x^2 - 12x + 18$
9. $x^4 - 2x^2 + 1$
10. $5a^3 - 15ab^2$
11. $x^4 - 6x^2 + 9$
12. $a^6 - \frac{1}{16}$
13. $49a^3 - a$
14. $\frac{a^2}{4} + \frac{1}{49} - \frac{a}{7}$

(1)

Effectue :

- 1) $6a + 3a$
- 2) $5b + 7b$
- 3) $2a - 10a$
- 4) $6c - 33c$
- 5) $2b^2 + 3b^2$
- 6) $-33c + (2c - 3c)$
- 7) $a - 0,7a + 3a$
- 8) $1,25b - 3,85b - b$
- 9) $a - 2a - 8a + 15a$
- 10) $(2,5c - 14c) + (8c - 22c)$
- 11) $(0,6 + 3b) + (2a - 17b)$
- 12) $a - 2b - 3a - 4b - 5c$
- 13) $0,6a - 2c - 6a + 0,75c$
- 14) $2,6b + (2,6c - 3b)$
- 15) $a - 3b - 10c - 2a + 5c$
- 16) $0,75ab - 2,5ab$
- 17) $(0,6a + 2bc) + (8bc + 1,2a)$
- 18) $(3ab - 6ac + 2ab) + 2ac$
- 19) $0,25a^2 - b^2 - a^2 + b^2$
- 20) $0,1abc - 1,6abc$
- 21) $\frac{2}{7}b + \frac{1}{5}b$
- 22) $21a - \frac{3}{2}a$
- 23) $\frac{5}{7}c - \frac{14}{15}c$
- 24) $-\frac{3}{7}a + \frac{1}{49}a$
- 25) $\frac{11b}{13} + \frac{42b}{-17}$

(2)

Effectue :

- 1) $-2x + 4x$
- 2) $x + y$
- 3) $yz + 2yz$
- 4) $7y - 3x$

- 5) $0,1x + 0,2x$
- 6) $4xyz - 12xyz$
- 7) $x + 3y - 5x + y$
- 8) $(20x + 10y) + 30x$
- 9) $x^2 + y^2$
- 10) $x + y - 3x$
- 11) $x - (y - 3x)$
- 12) $(x - y) - 3x$
- 13) $z - 3z - 10z$
- 14) $(x + 2y + 3z) - (x - 2y - 3z)$
- 15) $\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}a - \frac{1}{8}a$
- 16) $2a^2 - \frac{4}{-5}a^2 - 0,1a^2$
- 17) $\frac{4}{11}ab + \frac{6}{22}ab + \frac{5}{33}ab$
- 18) $\frac{7}{12}c + \frac{13c}{-15} - c$

(3)

Effectue :

- 1) $a(b + c - d)$
- 2) $2a(a + b)$
- 3) $a^2(b^2 - c - d)$
- 4) $6a(2b - 3a)$
- 5) $(ab + bc)2a^2$
- 6) $-x^2(2y^2 - x)$
- 7) $(-x)^2(x - y)$
- 8) $-36a(2x - 3y)$
- 9) $5xy(x + 2y)$
- 10) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 ab \left(\frac{2}{3}a + 2b\right)$
- 11) $8(a + 9) - 70$
- 12) $b + (6 + b)15$
- 13) $c(c + 2) + (c^2 - 2c)$
- 14) $(2a + 3b)3a + (a^2 + 5)$
- 15) $a(b + c) + 5c(2a - b)$

1) Factoriser:

$$A = 12a(x+3y) - 15a(3y+x)$$

$$B = 3a(x-1) + 2b(1-x) - 4c(1-x)$$

$$C = 4a(x-y) - 6b(y-x)$$

$$D = (1-2x)(3x-2) + (4+3x)(3x-2)$$

$$E = (x-1)(3x-2) - (2x+1)(2-3x)$$

2) Calculer:

$$A = 2 \cdot (-3)^2 + (-2)^3$$

$$B = -2 \cdot (-5)^3 - 2 \cdot (-4)^2$$

$$C = (-10)^2 \cdot 5^4 \cdot (-2)^2$$

$$D = -\left[2 - (-3)^2 + 2^2 \right]^2$$

$$E = -\left[-(3-5)^2 + (7-3)^3 \right]^2$$

$$F = \left[3^2 + (-5)^2 + (-7)^3 + 3^3 \right]^2$$

3) Calculer:

$$A = (-2)^3 + (-2)^2 + (-2)^1 + (-2)^0 - (-3)^0 - (-2^3)$$

$$B = (2^3 - 3^2)^3 \cdot (17 - 4^2)^5 \cdot (1^3 - 2)^5$$

$$C = (-3)^1 \cdot (6 \cdot 2^2 - 5^2)^4 \cdot (3^2 + 1 - 2^3)^2 \cdot (-4^0)$$

4) Effectuer:

$$A = (2a-b) \cdot (2a+b)$$

$$B = (2a-b)^2$$

$$C = (a+2b)^2$$

$$D = (2a-b)^2 - (2a+b)^2$$

$$E = (2a+b) \cdot (-a+3b)$$

$$F = x(2y+3x) + y(y-2x) - 3x^2$$

$$G = (x-y)(a+b-c) - (y-x)(c-a-b)$$

5) Effectuer:

$$A = \frac{(-30)(-6)}{(-4)(-3)(-5)} - \frac{(-45)(-24)(+10)}{(-15)(-6)(-120)} - (-3)^0$$

$$B = -\left[-3^2 - |-3|^2\right] - (-4)(-3)^3(-1)^3 - |-9|^2 - (-6)^0 - (-3)(-3)$$

$$C = (-1)^5(-2)^3(-3)^0 - 2^0$$

$$D = -[-(-3) + (-2)](-2) - \left[-(+8) - |-2 + 3| - (-9)\right](-1) - (-1)$$

$$E = (-4)^2 - 4^2 + (-2)(-3)^2|-1| - (-1)^3 + (-4)^0 - (-2)^5 - (-1)^0$$

$$F = \frac{(-27)(+13)(-28)}{(-12)(-39)(+9)} - \frac{(-25)(-3)(-12)}{(+)3)(-75)(-2)(+3)} - \frac{-36}{(-9)(-3)}$$

6) Calculer:

$$A = -11 \cdot (-125) \cdot (-25) \cdot (-2) \cdot 8 \cdot 2 \cdot (-43)$$

$$B = -1 + 3 \cdot [-11 + 3 \cdot (-15)] - [(40 - 3) \cdot (-30) - (-1)]$$

$$C = -[-(a + b - c) + (a - b)] - [(-a + b + c) - (-a - c)]$$

$$D = 2a - a \cdot [-16 + (-9) \cdot (-2)]$$

$$E = -24 \cdot \frac{-3c}{9} \cdot \frac{-4b}{-32} \cdot \frac{(-3a) \cdot 2}{-18}$$

$$F = \left(3 - 2^2\right)^{10} + \left[-2 - 2 \cdot (-1)^5\right]^3$$

$$G = 2 - 2^5 - (-2)^5 - 5 - 5^2 - (-5)^2 \cdot (2^0 - 2^2)$$

$$\frac{12}{18} \cdot \frac{-27}{21} - \frac{\underline{33}}{\underline{65}}$$

$$H = \frac{110}{\left[\frac{-74}{21} + \frac{200}{84}\right] \cdot \frac{36}{13}}$$

$$I = \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{3}{5} - \frac{6}{4}}{\frac{-11}{12} - \frac{3}{5}}$$
