

Division euclidienne de polynômes

Calculer le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$ de chacune des divisions :

Exercice 1

- a) $A(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ par $B(x) = x^2 + 1$
- b) $A(x) = x^3 + 2x^2 + 3$ par $B(x) = x^2 - x - 1$
- c) $A(x) = x^3 - 4x + 5$ par $B(x) = x^2 - 3x + 2$
- d) $A(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x + 1$ par $B(x) = x^2 - 4x + 1$
- e) $A(x) = x^4 - 3x^2 + 6$ par $B(x) = x^3 - 5x^2 + x - 6$
- f) $A(x) = x^4 + 2$ par $B(x) = x^2 + 4x - 2$

Exercice 2

- a) $A(x) = x^5 - 3x^3 - 2x^2 + x + 6$ par $B(x) = x^3 - x + 1$
- b) $A(x) = 2x^3 - 3x + 2$ par $B(x) = x + 2$
- c) $A(x) = -2x^3 + 4x^2$ par $B(x) = x^2 - 2$
- d) $A(x) = 3x^3 - 2x + 1$ par $B(x) = 3x^2 + 3x - 1$
- e) $A(x) = x^4 - x$ par $B(x) = 2x + 1$
- f) $A(y) = y^4 + 1$ par $B(y) = y^2 - \sqrt{2}y + 1$

Exercice 3

- a) $A(x) = 2x^3 - 3x + 2$ par $B(x) = x - 2$
- b) $A(y) = y^6 - 5y^5 - 2y^4 - 3y^3$ par $B(y) = y^3 + y^2 - 2$
- c) $A(y) = 3y^3 + 2y^2 - 3y - 2$ par $B(y) = y - 1$
- d) $A(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2$ par $B(x) = 2x^2 - 1$
- e) $A(y) = 3y^3 + 2y^2 - 3y - 2$ par $B(y) = y + 1$
- f) $A(x) = x^3 + 5x^2 + 5x - 2$ par $B(x) = x + 2$

Exercice 4

- Effectuer la division euclidienne de $P(x) = 2x^2 + x + 5$ par $x - \frac{3}{2}$.
- En déduire la division euclidienne de $P(x)$ par $\frac{3}{2} - x$, par $2x - 3$ et par $4x - 6$.
- En déduire la division euclidienne de $S(x) = 6x^2 + 3x + 15$ par $x - \frac{3}{2}$, par $\frac{3}{2} - x$, par $2x - 3$ et par $4x - 6$.

Exercice 5

Déterminer les paramètres réels m, p, r, s et t tels que :

$$1.) \frac{6x^2+x-3}{3x-1} = m \cdot x + p + \frac{r}{3x-1}$$

$$2.) \frac{-6x^2+x+5}{2x-1} = m \cdot x + p + \frac{r}{2x-1}$$

$$3.) \frac{2x^3-4x^2-x+5}{2x^2-1} = m \cdot x + p + \frac{r}{2x^2-1}$$

$$4.) \frac{4x^2-4x-7}{2x+1} = m \cdot x + p + \frac{r}{2x+1}$$

$$5.) \frac{-6x^5+4x^4-7x^3-23x^2+15x-34}{2x^3-x+7} = m \cdot x^2 + px + r + \frac{sx+t}{2x^3-x+7}$$

$$6.) \frac{-3x^6+6x^5+12x^4+x^3-7x^2+9x+11}{3x^4-x+5} = m \cdot x^2 + px + r + \frac{sx+t}{3x^4-x+5}$$

Exercice 6

- Déterminer les paramètres réels a et b tels que le polynôme $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 2$ soit divisible par $x^2 + 2$. Quelle factorisation obtient-on alors ?
- Déterminer le paramètre m pour que $A(x) = mx^2 + (m-1)x - m + 2$ soit divisible par $3x-1$. Après avoir remplacé m par la valeur trouvée, en déduire une factorisation et toutes les racines de $A(x)$.

Exercice 7

Déterminer le paramètre réel m pour que la division du polynôme :

- 1.) $A(x) = 2mx^2 - (m+1)x - m$ par $B(x) = x + 2$ donne un reste égal à 11.
- 2.) $A(x) = mx^2 - 2(m-1)x + m$ par $B(x) = x - 3$ donne un reste égal à 2.
- 3.) $A(x) = mx^2 + (4m-3)x - 2$ par $B(x) = x + 2$ soit exacte.
- 4.) $A(x) = mx^2 - 2(m-1)x + 3$ par $B(x) = x + 3$ donne un reste égal à -3.
- 5.) $A(x) = 2mx^2 - (5m-2)x - 3m$ par $B(x) = x - 3$ donne un reste égal à -2.
- 6.) $A(x) = m^2x^3 - (m+3)x^2 + 2mx - 5$ par $B(x) = x - 2$ donne un reste égal à 15.
- 7.) $A(x) = (m+1)x^3 - (2m-1)x^2 + 3x - m$ par $B(x) = x + 1$ soit exacte.
- 8.) $A(x) = 2x^3 + mx^2 - 29x + 30$ par $B(x) = x - 2$ soit exacte.

Après avoir remplacé le paramètre réel m par la valeur trouvée, calculez dans chaque cas le quotient et écrivez la division euclidienne correspondante.

Exercice 8

Effectuer la division euclidienne de $A(x) = 2x^8 - 54x^5 + 8x^3 - 216$ par $B(x) = x^3 - 27$.

En déduire une factorisation du polynôme $A(x)$, puis résoudre l'équation $A(x) = 0$.

Exercice 9

Compléter le tableau en utilisant l'algorithme de Horner :

Dividende $P(x)$	Diviseur $D(X)$ de type $(x-a)$	a	Quotient $Q(x)$	Reste r	$P(a)$
$x^2 + 7x + 12$	$x + 4$				
$x^3 - 3x^2 + 7x - 1$	$x + 2$				
$x^3 - 5x + 2$	$x - 2$				
$x^3 - 1$	$x - 1$				
$x^5 + 1$	$x + 1$				

Exercice 10

Le polynôme $P(x)$ est-il divisible par le binôme $D(x)$? Si oui, écrire $P(x)$ sous la forme d'un produit.

- 1.) $P(x) = x^2 - x - 6$ et $D(x) = x - 3$
- 2.) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ et $D(x) = x + 2$
- 3.) $P(x) = 2x^3 - x + 2$ et $D(x) = x - 1$
- 4.) $P(x) = x^3 + 4x^2 - 4x + 5$ et $D(x) = x + 5$
- 5.) $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 3$ et $D(x) = x + 3$

Solutions

Exercice 1

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a) $Q(x) = x + 1$, $R(x) = 0$ | d) $Q(x) = x^2 + 5x + 18$, $R(x) = 66x - 17$ |
| b) $Q(x) = x + 3$, $R(x) = 4x + 6$ | e) $Q(x) = x + 5$, $R(x) = 21x^2 + x + 36$ |
| c) $Q(x) = x + 3$, $R(x) = 3x - 1$ | f) $Q(x) = x^2 - 4x + 18$, $R(x) = -80x + 38$ |

Exercice 2

- | | |
|--|---|
| a) $Q(x) = x^2 - 2$, $R(x) = -3x^2 - x + 8$ | d) $Q(x) = x - 1$, $R(x) = 2x$ |
| b) $Q(x) = 2x^2 - 4x + 5$, $R(x) = -8$ | e) $Q(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{9}{16}$, $R(x) = \frac{9}{16}$ |
| c) $Q(x) = -2x + 4$, $R(x) = -4x + 8$ | f) $Q(x) = y^2 + \sqrt{2}y + 1$, $R(x) = 0$ |

Exercice 3

- | | |
|--|--|
| a) $Q(x) = 2x^2 + 4x + 5$, $R(x) = 12$ | d) $Q(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$, $R(x) = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ |
| b) $Q(y) = y^3 - 6y^2 + 4y - 5$, $R(y) = -7y^2 + 8y - 10$ | e) $Q(y) = y^2 - y - 2$, $R(x) = 0$ |
| c) $Q(y) = 3y^2 + 5y + 2$, $R(y) = 0$ | f) $Q(x) = x^2 + 3x - 1$, $R(x) = 0$ |

Exercice 5

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1) $m = 2$, $p = 1$, $r = -2$ | 5) $m = -3$, $p = 2$, $r = -5$, $s = -4$, $t = 1$ |
| 2) $m = -3$, $p = 2$, $r = 3$ | 6) $m = -1$, $p = 2$, $r = 4$, $s = 3$, $t = -9$ |
| 3) $m = 1$, $p = -2$, $r = 3$ | |
| 4) $m = 2$, $p = -3$, $r = -4$ | |