Injections, surjections, bijections

Exercice 1

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 2

Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$.

1° Déterminer les ensembles suivants :
$f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1] \cup [-2,1])$ et $f([-3,-1] \cap [-2,1])$. Les comparer.

2° Mêmes questions avec les ensembles
$f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$,
$f^{-1}(]-\infty,2] \cup [1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,2] \cap [1,+\infty[)$.

Exercice 3

Donner des exemples d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ injective et non surjective, puis surjective et non injective.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$.
f est-elle injective ? surjective ?
Déterminer $f^{-1}([-1,1])$ et $f(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 5

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1° $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$

2° $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & -n \end{array}$

3° $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$

4° $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$

5° $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

6° $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

7° $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+1}{x-1} \end{array}$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1° f est-elle injective ? surjective ?

2° Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

3° Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 7

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = id$.

Exercice 8

Soit $f : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Composées

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminez - dans la mesure où elles sont définies - $u \circ v$, $v \circ u$, $u \circ u$ et $v \circ v$:

1° $u(x) = 1 + x, v(x) = 3x + 4$;

2° $u(x) = 2 + x, v(x) = x^2$;

3° $u(x) = 2 + x^2, v(x) = 5$;

4° $u(x) = \frac{1}{x}, v(x) = 1 - \frac{1}{2}x$;

5° $u(x) = 1 + x, v(x) = 2^x$;

6° $u(x) = \sin x, v(x) = \frac{\pi}{2}x$;

7° $u(x) = x^2, v(x) = \sin x$;

8° $u(x) = 1 - x^2, v(x) = (1-x)^2$.

Exercice 2

Déterminez toutes les composées possibles, en précisant chaque fois le domaine de définition :
$i(x) = x, f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 1 - x$, $h(x) = \frac{1}{1-x}, k(x) = \frac{1-x}{x}, l(x) = \frac{x}{1-x}$.
Remarque : La fonction i ci-dessus est l' *application identique* définie sur $\mathbb{R}$, ou l'*identité* de $\mathbb{R}$. Cette application est encore notée $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 3

Ecrivez chacune des fonctions suivantes sous la forme $v \circ u$, u et v étant des fonctions à déterminer :

1° $f(x) = (x+1)^2$;

2° $f(x) = |2x - 1|$;

3° $f(x) = \frac{1}{2x-1}$;

4° $f(x) = \cos(2x - 1)$;

5° $f(x) = \sin^2 x$.

Exercice 4

f est une *fonction affine* si et seulement si il existe des nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x, $f(x) = ax + b$. Si $b = 0$, on parle d'une *fonction linéaire*.

1° La composée de deux fonctions affines est-elle affine ?

2° La composée de deux fonctions linéaires est-elle linéaire ?

3° Examinez si les composées précédentes commutent.

Exercice 5

1° Notez la formule permettant de passer de degrés Kelvin en degrés Celsius, puis celle qui permet de transformer des degrés Celsius en degrés Fahrenheit.

2° Effectuez le passage de l'échelle Kelvin vers l'échelle Fahrenheit. Vous utiliserez pour cela le langage de la composition d'applications.

3° Passez de même de degrés Celius à degrés Kelvin, de degrés Fahrenheit à degrés Celsius. De quelle composée sera-t-il question maintenant ?